臺南市 105 年公私立國民中學數學競賽決賽試題

應答注意事項：

一、本試題共兩頁分兩大題，第一大題為 10 題填充題，每題 6 分；第二大題為計算及證明題，共 4 題，每題 10 分。

二、填充題答案請書寫於答案本中所標示的位置，計算及證明題請依題號順序詳列算式或證明過程。

三、本試題所提供之圖形僅供示意參考。

第一大題：填充題

1. 若 $x=\dfrac{5123}{2016}$，試求 $2|x-1|+5|x-2|+4|x-3|+3|x-4|$ 的值為＿＿＿＿＿＿。

2. 有 a,b 兩數，且兩個一元二次方程式 $x^2-16x+a=0$ 與 $x^2-20x+b=0$，有一個共同的解。若上述兩個一元二次方程式的三個相異解，恰形成一個公差為 2 的等差數列，則 $a+b$ 的值為＿＿＿＿＿。

3. 已知在一圓周上自某一點開始，依順時針方向分別依序填入 268 個整數，使得依順時針方向數起，每 20 個連續的數之和都是 75。如果在第 17 個位置上填入整數 3，在第 83 個位置上填入整數 4，且在第 144 個位置上填入整數 9，那麼第 210 個位置上的整數是＿＿＿＿＿＿。

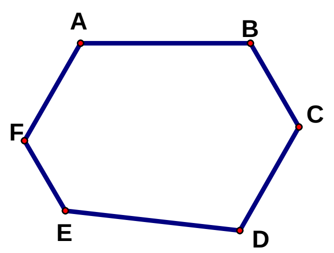
4. 有 5 個數 a,b,c,d,e，其數值分別為-1, 0, 1 中的任一個，則 $a+3b+3^2c+3^3d+3^4e$ 的值是正整數共有＿＿＿＿＿個。

5. 已知 a,b 為二數，且滿足 $|a|+a+b=10$ 及 $a+|b|-b=12$，則 $a+b$ 之值為＿＿＿＿＿＿。

6. 小華將一個大長方形切割成 6 塊小長方形 A、B、C、D、E、F（如下圖），若長方形 A 面積為 a，長方形 B 面積為 b，長方形 C 面積為 c，長方形 D 面積為 d，則長方形 E 與長方形 F 之面積和為＿＿＿＿＿。（請以 a,b,c,d 表示）

A	**B**	**C**
D	**E**	**F**

7. 已知六邊形 ABCDEF 之各內角度數相等，且 $\overline{AB}+\overline{BC}=11$，$\overline{FA}-\overline{CD}=3$，則 $\overline{BC}+\overline{DE}$ 的值為＿＿＿。



8. 假設 r,s,t 是三個相異的正整數，而且可以使得 $\dfrac{rs+st+tr-1}{rst}$ 也是正整數，則 $\dfrac{r^2s^2+s^2t^2+t^2r^2}{r+s+t}$ 所有可能的值為＿＿＿＿＿。

9. 已知 n 為一個五位數，將 n 除以 100，其商為 q，及餘數為 r，如果 $q+r$ 為 11 的倍數，則滿足這樣條件的所有 n 值共有______________個。

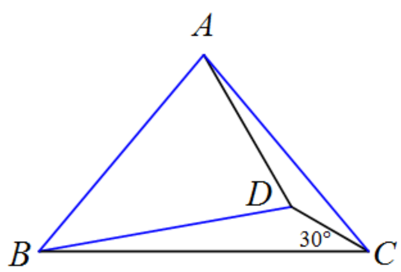
10. 我們規定：當一個多邊形的所有對角線都在該多邊形的內部時，我們將此多邊形稱為凸多邊形。已知有一個凸四邊形 $ABCD$，其中 $\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=8$，$\overline{CD}=6$，其中一條對角線 $\overline{AC}=8$，則滿足上述條件的四邊形中，$\overline{AD}$ 長的值為整數的所有可能值共有_______個。

第二大題：計算題

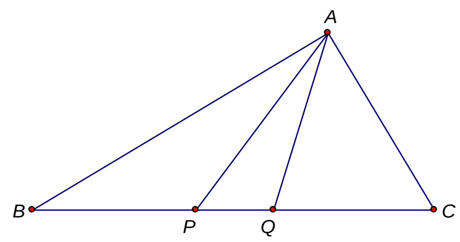
1. 試求滿足方程式 $(x+y)^2=(x+3)(y-3)$ 的所有可能 x,y 的解。(請詳述理由)

2. 設 n 為正整數且 $2^4+2^7+2^n$ 為完全平方數，試求滿足上述條件的所有可能的 n 值為何？(請詳述理由)

3. 如下圖，在 ΔABC 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，今在 ΔABC 內部取一點 D 使得 $\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{AC}$ 且 $\angle DCB=30^o$，若 $\overline{CD}=2$ 且 $\overline{AC}=2\sqrt{37}$，試求 ΔABC 面積。(請詳述理由)



4. 如下圖在 ΔABC 中，P 和 Q 是 $\overline{BC}$ 上兩點，使得 $\overline{AQ}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線且 $\overline{BP}=\overline{QC}$，$\overline{AP}>\overline{AQ}$。試證明：$\overline{AP}^2=(\overline{AB}-\overline{AC})^2+\overline{AQ}^2$。



本試題到此全部結束